ESTUDIO DE SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA $H = 0$ Y $H \neq 0$: UN ANÁLISIS MATEMÁTICO Y FÍSICO

Diego Pacheco y Leidy Suárez
Universidad Nacional de Colombia
llsuarezr@unal.edu.co, dapachecos@unal.edu.co

Se reporta un estudio, desde la geometría diferencial, sobre el problema de superficies con curvatura media $H = 0$ y $H \neq 0$, que se aplica a la geometría de películas y pompas de jabón. Como resultado del estudio, se obtiene la ecuación de Laplace-Young, de la cual podemos derivar el concepto de tensión superficial y mediante este comprender el fenómeno de capilaridad. Tal resultado, se contrasta con aproximaciones realizadas por la mecánica y la termodinámica, encontrando relaciones analógicas entre estas. Por otra parte, se analizan dos configuraciones de las películas de jabón, en forma de catenoide y como esfera. Para esta última configuración se discute el problema isoperimétrico.

Las pompas de jabón –juguete maravilloso y motivo para el arte– son también objeto de estudio en la matemática. Una pompa tiene la menor área posible, razón por la cual las superficies que obtenemos se denominan superficies minimales. Matemáticos como Laplace, Young y Gauss mostraron que la superficie de separación entre un líquido y un gas obedece a una ecuación que sugiere un concepto matemático: la curvatura media de una superficie (H). Según Deserno (2004) se cumple que una superficie es mínima si

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = 0.$$

Además del plano, las siguientes superficies son minimales: catenoide, helicoide, superficies de Scherk, etc. Cabe destacar que si se toman dos aros de alambre, muy juntos, se introducen en agua con jabón y, al sacarlos, se separan un poco se tendrá una superficie de forma de catenoide. Pero, no solo la matemática ha abordado este problema de las pompas de jabón, sino que tales deducciones matemáticas han sido usadas por la física. El principio por el cual la pompa tiene forma esférica se deriva del principio físico de la tendencia de cualquier sistema físico a buscar el estado de menor energía. En la película jabonosa, el estado de menor energía es la tensión superficial y es proporcional a su área. Así, la geometría diferencial permite entender el

Pacheco, D. y Suárez, L. (2015). Estudio de superficies con curvatura media $H = 0$ y $H \neq 0$: un análisis matemático y físico. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 203-204.

concepto físico de la tensión superficial, siendo Laplace y Young quienes mostraron que la superficie de separación líquida obedece a la ecuación:

$$p_i - p_e = -2H\sigma$$

donde σ es la superficie que separa dos medios sometidos a ambos lados por presiones p_i y p_e. Con la fórmula de Laplace se puede dar una explicación del fenómeno de capilaridad, para explicar el ascenso de agua a través de un tubo de pequeño diámetro interno. De otra parte, se discute cuál es el volumen encerrado más pequeño por una superficie, problema isoperimétrico[1], que surge como consecuencia de la ecuación de Laplace-Young, con H constante.

RESULTADOS

En un pompa esférica con radio R, se demuestra la expresión

$$\Delta p := p_i - p_e = \frac{2\sigma}{R}.$$

Usando aproximaciones de termodinámica y mecánica clásica, se obtiene la expresión de Laplace-Young.

El aumento de líquido es por lo tanto inversamente proporcional al radio interno del capilar, y la presión también será constante, dada por:

$$h = \frac{{l_c}^2 cos\vartheta}{R} \leq \frac{{l_c}^2}{R}, \text{ con } l_c = \sqrt{\frac{2\sigma}{g\Delta\rho}}.$$

En la presentación del póster, a partir del cálculo variacional y la geometría diferencial se analizará la forma de catenoide de las pompas, en una configuración particular, y se discutirá el problema isoperimétrico.

REFERENCIA

Deserno, M. (2004). *Notes on differential geometry with special emphasis on surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Original no publicado, Departmento de Química y Bioquímica, UCLA.

Rousseau, C. y Saint-Aubin, Y. (2008). *Mathematics and technology* (C. Hamilton, Tr.). New York, EUA: Springer. Recuperado el 27 de mayo de 2015, de http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dnovikov/EngMath13/RMAT.pdf

[1] Se pretende hallar entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro L, la que encierra una región de mayor área (Rousseau y Saint-Aubin, 2008).